Contents

1 Equacions Diferencials Ordinàries Lineals i de Coeficients Constants.

1.1 Introducció i Definicions.

Quan parlem d'equacions diferencials ens trovem en el contexte de sistemes dinàmics. Es important doncs donar una definició de sistema dinàmic.

Definition 1. *Un sistema és dinàmic si el seu comportament en el temps està determinat per equacions funcionals en les que estàn contingudes variables en diferents instants temporals; i.e. equacions funcionals en las que les variables independents representen diferents moments del temps.*

Per comprendre aquesta definició hem de comenar per explicar qué és una *equació funcional*. El concepte fonamental és el següent:

Definition 2. *Una equació funcional és una equació en la que la incògnita és una funció.*

Tots sabem que resoldre una funció vol dir trovar el valor (o valors) de la incògnita que satisfan l'equació. Resoldre una equació funcional vol dir, doncs, trovar una *funció* que satisfaci l'equació funcional *idènticament*, és a dir, la funció que hem de trovar ha de satisfer l'equació funcional per *qualsevol* valor admisible de la variable independent que apareixi en la funció.

Example 1. *Pensem per exemple, en l'equació funcional*

$$y'(x) - y(x) = 0$$

on $y'(x) \equiv \frac{dy}{dx}$*. El problema és trovar una funció tal que per qualsevol valor del seu argument, el valor de la funció i el de la seva primera derivada siguin iguals. Aquesta funció és* $y(x) = Ae^x$ *doncs* $y'(x) = Ae^x, \ \forall x$*. Per ser més precissos hem de dir que la solució de l'equació diferencial proposada és* $y(x) = Ae^x$ *perque* $\int Ae^x dx = Ae^x$*. Es a dir, la integració representa la solució d'una equació diferencial.*

Pensem ara en una solució alternativa com $y(x) = ax + b, \ a, b \in \Re$*. Sabem que* $y'(x) = a$*. si fem* $x = \frac{a-b}{a}$*, tindrem també que* $y(x) = a$*, pero per qualsevol* *altre valor de x, $y(z) \neq y'(z),\ \forall z \neq x$ de manera que la funció $y(x) = ax + b$ no satisfà idènticament la nostra equació funcional.*

Pensem ara que x denota temps. aleshores, $y(x) = y'(x)$ es pot considerar com una igualtat que conté el valor de y en qualsevol moment del temps i el que te en un cert moment pròxim arbitrari determinat per $y'(x)$. Com convenció notacional, quan x representi temps, ho denotarem per t.

Definition 3. *Una equació diferencial és una equació funcional en la que intervenen les derivades de la incògnita.*

Definition 4. *Una equació diferencial ordinaria és una equació diferencial que te una única variable independent.*

Definition 5. *Una equació diferencial parcial és una equació diferencial que te varies variables independents, i per tant l'equació diferencial s'expressa en termes de derivades parcials.*

Definition 6. *L'ordre d'una equació diferencial ve donat per l'ordre de la derivada més elevada que intervè en ella.*

Definition 7. *Una solució d'una equació diferencial és una funció que verifica l'equació; a la gràfica d'una solució d'una equació diferencial la denominem corba integral.*

Normalment una equació diferencial admet una familia infinita de solucions; cada membre d'aquesta familia està identificat per el valor d'unes certes constants. Tal familia de solucions es denomina *solució general*. Les constants que identifiquen els diferents membres de la familia de soluicions s'anomenen *constants d'integració*. Cada element de la solució general s'anomena *solució particular*.

Les equacions diferencials més utilitzades en la dinàmica econòmica son *lineals* i de *coeficients constants*. Aquestes són també les més senzilles des d'el punt de vista matemàtic. Dedicarem la nostra atenció a aquest tipus d'equacions diferencials: Equacions Diferencials Ordinàries Lineals i de Coeficients Constants.

Comenem amb un exemple senzill.

Example 2. *Considerem l'equació diferencial $y'(t) = a,\ \ a \in \Re$. La solució d'aquesta equació diferencial és una funció $y(t)$ que verifiqui $y'(t) = a$ per tot t. D'acord amb el càlcul integral elemental sabem que*

$$y(t) = \int a\, dt = at + b, \quad b \in \Re \tag{1}$$

Considerem ara un altre exemple.

Example 3. *Trovar la solució de l'equació diferencial* $y"(t) = a,\ a \in \Re$. *Realitzant dues integracions succesives obtenim*

$$\begin{aligned} y'(t) &= \int a\,dt = at + b \\ y(t) &= \int (at+b)dt = \frac{1}{2}at^2 + bt + c, \quad b, c \in \Re \end{aligned} \tag{2}$$

Les funcions (1) i (2) són les *solucions generals de les respectives equacions diferencials*. Notem que la solució general conté tantes *constants d'integració* com l'ordre de l'equació diferencial.

La forma general d'una equació diferencial ordinària lineal i de coeficients constants (que a partir d'ara i abusant del llenguatje, anomenarem senzillament equació diferencial), és

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = g(t) \tag{3}$$

on

- $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots$ representen les derivades d'ordre $n, n-1, \ldots$;
- $a_j,\ j = 0, 1, 2, \ldots, n$ són constants donades (d'aqui que s'anomeni equació diferencial de coeficients constants)
- $g(t)$ és una funció coneguda.

Notem que l'equació diferencial (3) és lineal i la seva única variable independent és t. D'aqui doncs que (3) sigui una equació diferencial ordinària lineal.

L'equació (3) es denomina *equació no homogènia*. La seva forma homogènia corresponent és

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0 \tag{4}$$

1.2 Tres teoremes útils.

Donada una equació diferencial com (3), ens interessa utilitzar uns resultats que permeten solucionar (3) i (4). Aquest són els tres teoremes que enunciem a continuació.

Theorem 1. *Si $y_1(t)$ és una solució de* (4)*, aleshores, $Ay_1(t)$ on A és una constant arbitrària, també és solució.*

Proof. Sigui $y_1(t)$ una solució de (4). Aixo vol dir

$$a_0 y_1^{(n)}(t) + a_1 y_1^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y_1'(t) + a_n y_1(t) \equiv 0 \tag{5}$$

Considerem ara $Ay_1(t)$ i substitum-la a (4) per obtenir

$$a_0 A y_1^{(n)}(t) + a_1 A y_1^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} A y_1'(t) + a_n A y_1(t) = 0$$

reordenant

$$A[a_0 y_1^{(n)}(t) + a_1 y_1^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y_1'(t) + a_n y_1(t)] = 0 \tag{6}$$

Si $Ay_1(t)$ ha de ser solució vol dir que s'ha de verificar (6). Donat que $y_1(t)$ és solució de (4), l'expressió entre corxets s'anula, implicant que (6) es verifica per qualsevol constant A. □

Theorem 2 (Teorema de superposició). *Si $y_1(t)$ i $y_2(t)$ són dues solucions diferentes (linealment independents) de* (4)*, aleshores $A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t)$ és també solució per qualsevols constants A_1, A_2 arbitràries.*

Proof. La demostració és semblant a la del teorema anterior. Siguin $y_1(t)$ i $y_2(y)$ dues solucions de (4). Aixo vol dir,

$$\begin{aligned} a_0 y_1^{(n)}(t) + a_1 y_1^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y_1'(t) + a_n y_1(t) \equiv 0 \\ a_0 y_2^{(n)}(t) + a_1 y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y_2'(t) + a_n y_2(t) \equiv 0 \end{aligned}$$

Considerem ara $A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t)$ i substitum-la a (4) per obtenir

$$\begin{aligned} a_0[A_1 y_1^{(n)}(t) + A_2 y_2^{(n)}(t)] + a_1[A_1 y_1^{(n-1)}(t) + A_2 y_2^{(n-1)}(t)] + \ldots + \\ a_{n-1}[A_1 y_1'(t) + A_2 y_2'(t)] + a_n[A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t)] = 0 \end{aligned}$$

reordenant

$$\begin{aligned} A_1[a_0 y_1^{(n)}(t) + a_1 y_1^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y_1'(t) + a_n y_1(t)] + \\ A_2[a_0 y_2^{(n)}(t) + a_1 y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y_2'(t) + a_n y_2(t)] = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Si $A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t)$ ha de ser solució vol dir que s'ha de verificar (7). Donat que $y_1(t)$ i $y_2(y)$ són solucions de (4), les expressions entre corxets s'anulen, implicant que (7) es verifica per qualsevols constants A_1 i A_2. □

Per clarificar una mica aquest teorema, podem fer tres comentaris:

- donada una equació diferencial d'ordre n, el resultat que presenta el teorema es verifica per qualsevol número $k \leq n$ de solucions diferentes;
- donada una equació diferencial d'ordre n, es denomina *conjunt fonamental* a un conjunt de n solucions linealment independents;
- diem que m funcions $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$ són *linealment dependents* si existeixen constants $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (no totes elles nul.les) tals que l'equació $\sum_{j=1}^{m} A_j y_j(t) = 0$ es cumpleix idènticament per tots els valors possibles de t. En cas contrari, diem que les m funcions són *linealment independents*.

D'acord amb el teorema 2, per trovar la solució general de l'equació homogènia, podem trovar n solucions diferentes $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ i combinar-les linealment en la funció

$$f(t; A_1, A_2, \ldots, A_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i y_I(t)$$

Donat que aquesta funció te n constants arbitràries, ella serà la solució general de (4).

Theorem 3. *Sigui $f(t; A_1, A_2, \ldots, A_n)$ la solució general de l'equació diferencial* (4)*, on $A_j,\ \ j = 0, 1, 2, \ldots, n$ són constants arbitràries, i $\overline{y}(t)$ és una solució particular de* (3)*, aleshores*

$$\overline{y}(t) + f(t; A_1, A_2, \ldots, A_n) \tag{8}$$

és la solució general de (3)*.*

Proof. Aquest teotrema es pot demostrar substitunt (8) en (3) i comprobar que aquesta darrera es verifica. Donat que la funció (8) conté exactament n constants arbitràries, serà la solució de (3). □

Aquests teoremes ens diuen que el problema de solucionar una equació diferencial homogènia es redueix doncs a trovar les n funcions $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$. Si l'equació diferencial és no homogènia a més hem de trovar una solició particular $\overline{y}(t)$ i sumar-la a la solució general de l'equació homogènia.

La solució particular $\overline{y}(t)$ deprendrà ceteris paribus de la forma funcional de $g(t)$. Això sugereix un mètode general (denominat dels coeficients indeterminats) que consisteix en especificar una solució particular amb la mateixa forma funcional que la funció $g(t)$ pero amb coeficients indeterminats. A continuació es substitueix aquesta funció en la equació no homogènia i es determinen els coeficients de manera que l'equació es cumpleix.

1.3 Equacions Diferencials versus Equacions en Diferencies.

Hi ha una gran semblana entre les equacions diferencial i les equacions en diferències en el sentit que molts dels teoremes generals són els mateixos. Hi ha també algunes diferències que donen lloc a diferentes interpretacions econòmiques. La principal distinció formal és que en les equacions diferencials t vcaria de forma contínua i també la funció $y(t)$ és contínua. En les equacions en diferències t varia de forma discreta en un conjut de valors igualment espaiats de manera que la funció $y(t)$ est solament definida pels valors corresponents de t. Això vol dir que no és indiferent utilitzar equacions diferencials o en diferències en la formalització d'un problema econòmic; si pensem que un cert fenòment econòmic dinàmic te lloc de forma contínua i sense retards discontinus, aleshores l'instrument matemàtic a utilitzar són les equacions diferencials; si pel contrari pensem que el fenòmen en qüestió es desenvolupa de forma discontínua, l'instrument adient són les equacions en diferències. Sovint pero, no serà fàcil establir aquesta distinció tan radical, de manera que si volem evitar tenir d'utilitzar instruments matemtics més complicats (com les equacions mixtes en diferències-diferencials), tindrem que decidir al principi quin enfoc ens sembla mes adient pel problema que volem resoldre. Que tal decisió en prengui al principi es molt important perque l'us d'un instrument en lloc de l'altre pot donar resultats econòmics diferents. Per exemple, en el cas d'equacions de primer ordre una equació en diferències pot donar a dos classes de moviments monòton i oscil.lant, mentre que una equació diferencial només admet moviments monòtons. Un exemple d'això és l'anàlisi de l'estabilitat de l'equilibri entre oferta i demanda en un mercat competitiu (l'anomenat teorema de la trenyina).